Teoría de Lenguajes

*Primer cuatrimestre de 2023*

# Primer parcial

- El examen dura cuatro horas.
- El examen es a libro abierto. No está permitido utilizar dispositivos electrónicos.
- Se aprueba con 65 puntos sobre 100.
- Resuelva cada ejercicio en hojas separadas.
- Escriba nombre, apellido, L.U. y número de orden en cada hoja. Numere las hojas.
- Consigne por escrito todos los razonamientos que justifiquen sus respuestas.

**Ejercicio 1.** (*25 pts*) Sea $\mathcal{L}_1$ el lenguaje de las cadenas denotadas por la siguiente expresión regular:

$$(ab^+|\lambda)c^*a^+$$

Dar un autómata finito determinístico de estados mínimos que acepte las cadenas de $\mathcal{L}_1$ que tienen una cantidad par de *a*es.

**Ejercicio 2.** (*25 pts*) Sea

$$\mathcal{L}_2 = \left\{\alpha\beta \mid \alpha \in \mathcal{L}(a(bc)^+),\ \beta \in \{a,b\}^*,\ |\alpha|_b = |\beta|\right\} \cup \mathcal{L}\left((ab)^*\right).$$

¿Es $\mathcal{L}_2$ un lenguaje regular? En caso afirmativo, dar una expresión regular que lo denote. En caso contrario, demostrarlo.

**Ejercicio 3.** (*25 pts*) Dar un transductor finito para la relación:

$$\{(\alpha,\beta) \mid\ \alpha,\beta \in \{a,b\}^*,\ \alpha \neq \beta \text{ y } |\alpha|_a = |\beta|_a\}.$$

**Ejercicio 4.** (*25 pts*) Sea

$$\mathcal{L}_4 = \{\omega_1\#\omega_2 \mid \omega_1,\omega_2 \in \{a,b\}^* \text{ y } |\omega_1|_a = 2\,|\omega_2|_b - 1\}.$$

Dar si es posible, y en caso contrario explicar por qué no:

*a.* Un autómata de pila que acepte $\mathcal{L}_4$.

*b.* Un autómata de pila determinístico que acepte $\mathcal{L}_4$.

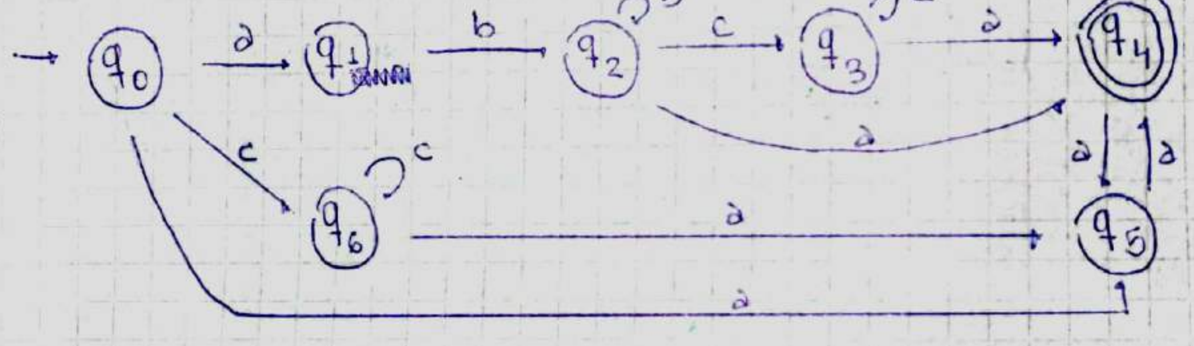
*c.* Un autómata de pila determinístico que acepte $\mathcal{L}_4$ por pila vacía.

1) $(ab^+/\lambda)\, c^*\, a^+$

PARA RESOLVER EL EJERCICIO EMPIEZO ANALIZANDO LA EXP. REGULAR Y VEO LO SIGUIENTE:

- LAS CADENAS $\in L_1$ PUEDEN ARRANCAR CON $ab^+$
- " " " " " " $c^*$
- " " " " " " $a^+$.
- " " " "

POR ESE MOTIVO, PODEMOS IMAGINAR 3 CAMINOS EN EL AUTOMATA. ADEMÁS, DEBEMOS CONSIDERAR LA PARIDAD DE LA CANTIDAD DE $a$'S. PROPONGO EL SIGUIENTE AUTOMATA




$A_1 = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \underbrace{\{a, b, c\}}_{\text{NO ESTÁ ESPECIFICADO, LO ASUMO}}, \delta, q_0, \{q_4\} \rangle$.

(ESTADO TRAMPA IMPLÍCITO)

LA IDEA ES LA DE LOS 3 CAMINOS:

- SI VOY DE $q_0$ A $q_1$, ASUMO QUE ARRANCO CON $ab^+$
- SI VOY DE $q_0$ A $q_6$, PIENSO QUE ARRANCO CON $c^*$.
- SI VOY DE $q_0$ A $q_5$, PIENSO QUE ARRANCO CON $a^+$.

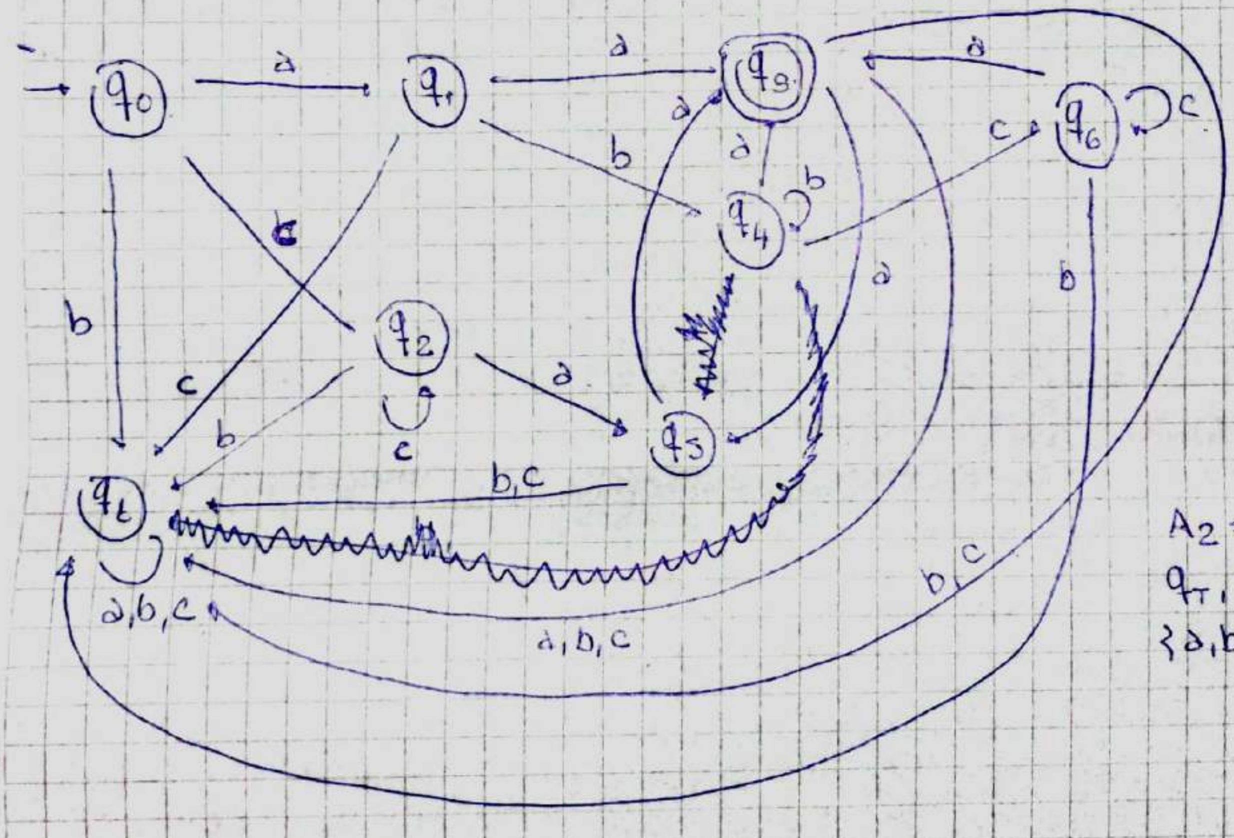
$q_4$ ES $a$ PARES Y $q_5$ $a$ IMPARES. (Le podías poner $q_P$, $q_I$)

- SI VOY DE $q_2$ A $q_3$ ES PORQUE USO $c$'S
- SI VOY DE $q_2$ A $q_4$ ES PORQUE NO USO $c$'S.

DADO QUE ~~M~~ $A_1$ NO ES DETERMINÍSTICO, LO DETERMINIZO.

| δ' | a | b | c |
|---|---|---|---|
| {q0} | {q1, q5} | {qT} | {q6} |
| {q1, q5} | {q4} | {q2} | {qT} |
| {q6} | {q5} | {qT} | {q6} |
| {qT} | {qT} | {qT} | {qT} |
| {q4} | {q5} | {qT} | {qT} |
| {q2} | {q4} | {q2} | {q3} |
| {q5} | {q4} | {qT} | {qT} |
| {q3} | {q4} | {qT} | {q3} |

LLAMO A {q0} q0 EN EL AFD. NUEVO
" " {q1, q5} q1 " " " "
" " {q6} q2 " " " "
" " {qT} qT " " " "
" " {q4} q3 " " " "
" " {q2} q4 " " " "
" " {q5} q5 " " " "
" " {q3} q6 " " " "




$A_2 = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_T, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{a,b,c\}, \delta', q_0, \{q_3\} \rangle$

AHORA LO MINIMIZO

| | ≡0 | a | b | c | ≡1 | a | b | c | ≡2 | a | b | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| q0 | NF | NF | NF | NF | 1 | 2 | 1 | 1 | A | B | G | A |
| q1 | NF | F | NF | NF | 2 | 3 | 2 | 1 | B | C | D | G |
| q2 | NF | NF | NF | NF | 1 | 2 | 1 | 1 | A | B | G | A |
| q3 | F | NF | NF | NF | 3 | 2 | 1 | 1 | C | B | G | G |
| q4 | NF | F | NF | NF | 2 | 3 | 2 | 2 | D | C | D | F |
| q5 | NF | F | NF | NF | 2 | 3 | 1 | 1 | E | C | G | G |
| q6 | NF | F | NF | NF | 2 | 3 | 1 | 2 | F | C | G | F |
| q7 | NF | NF | NF | NF | 1 | 1 | 1 | 1 | G | G | G | G |

NOTA

COMO VEMOS EN LOS ÚLTIMOS CALCULAS, ~~YA~~ GENERAMOS TANTOS ESTADOS COMO PARTICIONES. COMO DE UNA ITERACIÓN A OTRA LA CANT. DE PARTICIONES NO PUEDE DISMINUIR, TERMINAMOS DE MINIMIZAR Y RESULTA QUE $A_2$ YA ERA MINIMO.

✓

El ejercicio está bien.

Otra alternativa:

- Usar derivadas para ir de ER → AF
- Dar un AF para
- Intersecarlos con algún algoritmo
- Minimizar

Escaneado con CamScanner

② LA IDEA ES DEMOSTRAR QUE $L_2$ NO ES REGULAR USANDO PUMPING. PARA ESO MIREMOS $L_2$:

$$L_2 = \underbrace{\{\alpha\beta / \alpha \in L(a(bc)^+),\ \beta \in \{a,b\}^*,\ |\alpha|_b = |\beta|\}}_{\text{LLAMO A ESTO } L_{2,a}} \cup \underbrace{L((ab)^*)}_{L_{2,b}}$$

ME GUSTARÍA USAR LA PROPIEDAD QUE DICE QUE DADO L REGULAR Y L' NO REGULAR $\Rightarrow L \cup L'$ ES NO REG

PERO [illegible] $L_{2,a} \cap L_{2,b} = \{\lambda\}$

PARA ARREGLAR ESO DEFINO $L_{2,a}' = L_{2,a} / \{\lambda\}$

ASÍ $L_2 = L_{2,a}' \cup L_{2,b}$

$L_{2,b}$ ES REGULAR PORQUE ESTÁ DADO POR UNA EXP. REGULAR.

PRUEBO QUE $L_{2,a}'$ ES NO REGULAR. LO HAGO PROBANDO QUE $L_{2,a}'^R$ (LA REVERSA DE $L_{2,a}'$) NO ES REGULAR.

SUPONGAMOS QUE $L_{2,a}'^R$ ES REGULAR Y SEA $p$ LA CONSTANTE DE PUMPING, DEFINO $\alpha = b^{p}(cb)^p a$

NOTAR QUE ~~[illegible]~~

SI VEMOS $\alpha^R = a(bc)^p b^{p}$ Y QUE $\alpha^R \in L_{2,a}'$ PORQUE $a(bc)^p \in L(a(bc)^+)$ Y SE CUMPLE QUE $|a(bc)^p|_b = |b^p|$

SEA LA SIGUIENTE LA DESCOMPOSICIÓN DE $\alpha$:
$\alpha = xyz$ CON $|xy| \leq p$ Y $|y| \geq 1$

NOTAR QUE $y$ SERÁN TODAS $b$'S ($b^+$).

ELIJO $i = 0 \Rightarrow \alpha = xz$. LO QUE PASA ES QUE $\alpha' = xz = b^{p-|y|}(cb)^p a$ Y POR ESTO $|b^{p-|y|}| \neq |(cb)^p a|_b$

$\Rightarrow \alpha' \notin L_{2,a}'^R \Rightarrow L_{2,a}'^R$ NO ES REGULAR

$\Rightarrow L_{2,a}'$ TAMPOCO ES REGULAR

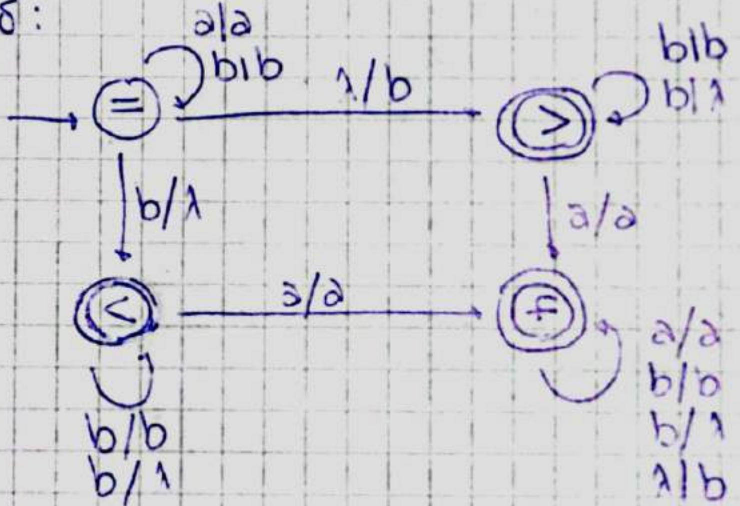
$\Rightarrow L_2$ NO ES REGULAR.

FECHA

(3)

<u>IDEA</u>: DADA UNA CADENA $\alpha \in \{a, b\}^*$, UNA CADENA $\beta \in \{a, b\}^*$ TAL QUE $\alpha \neq \beta$ Y $|\alpha|_a = |\beta|_a$ ES TAL QUE MANTIENE LA CANTIDAD DE a'S Y EN ALGÚN LADO CAMBIA, BORRA O ESCRIBO MÁS b'S. ESTO LO PODEMOS REPRESENTAR EN EL SIGUIENTE TRANSDUCTOR:

$\delta$:




DONDE (=): $\alpha = \beta$

(>): ESCRIBO UNA b MÁS EN ALGÚN LUGAR.

(<): BORRO UNA b EN ALGÚN LUGAR

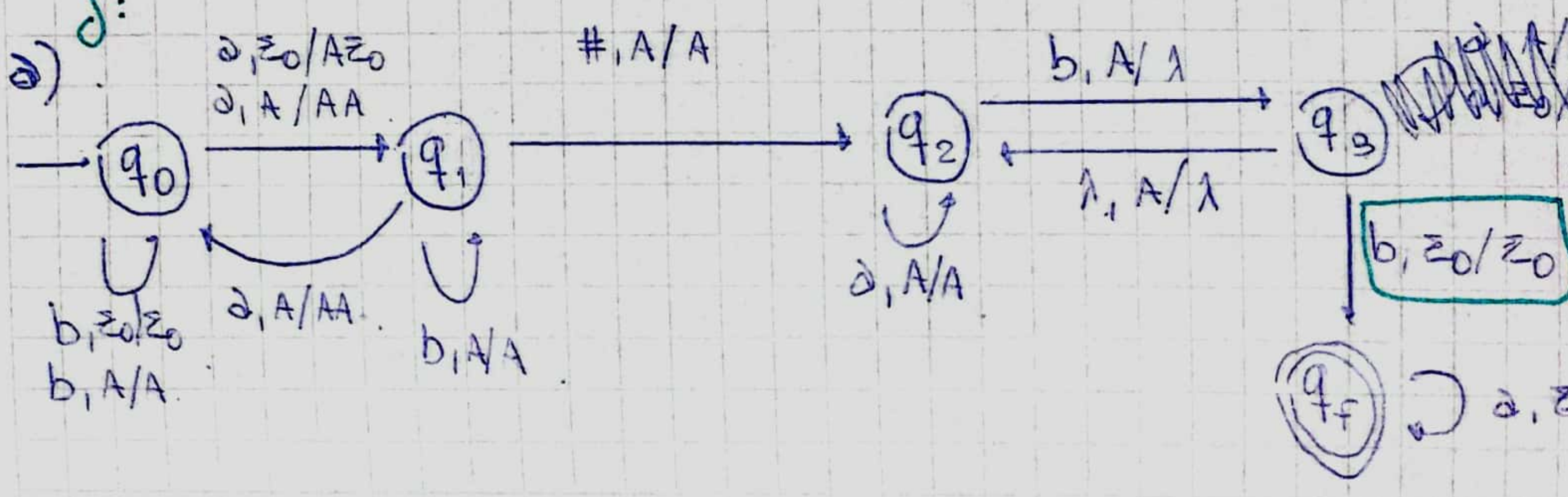
(f): REESCRIBO LAS b'S EN OTRO LUGAR, AGREGO MÁS O BORRO b'S.

$M = \langle \{=, >, <, f\}, \{a, b\}, \{a, b\}, \delta, =, \{<, >, f\} \rangle$

(4) $L_4 = \{ w_1 \# w_2 \,/\, w_1 . w_2 \in \{a,b\}^* \text{ y } |w_1|_a = 2|w_2|_b - 1 \}$

$\delta$:

a)




CON ESTA TRANSICIÓN NO ACEPTAS LAS CADENAS QUE EN EL ITEM (C) DECIS QUE PERTENECEN A $L_4$.

$A_1 = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{a, b, \#\}, \{Z_0, A\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\} \rangle$ ✓ DEBERÍAS HABER PUESTO $\lambda, Z_0 / Z_0$

PRIMERO NOTAR QUE $|w_1|_a$ ES IMPAR. ESO LO CHEQUEO ENTRE $q_0$ Y $q_1$. LUEGO, AL LEER #, EMPIEZO A DESAPILAR A'S (QUE APILÉ ANTES, ENTRE $q_0$ Y $q_1$, UNA POR CADA $a$ LEÍDA). DESAPILO 2 A'S X CADA b LEÍDA, HASTA QUE LEO UNA b Y EN EL TOPE HAY UN $Z_0$ AHÍ PASO A $q_f$. ✓

¡LA IDEA ESTÁ MUY BIEN! PERO TE FALTÓ CONSIDERAR LOS CASOS DEL FINAL.

~~ESTO SE PUEDE VER EN a, EN EL ESTADO q3 SI LLEGAMOS A LA ÚLTIMA b, PASAMOS A qf, PERO SI NO NOS VAMOS A q2 Y SEGUIMOS DESAPILANDO. ASÍ SE INDETERMINA EL AUTOMATA.~~

c) NO, NO SE PUEDE, YA QUE $L_4$ NO ES LIBRE DE PREFIJOS.

$a\#ba \in L_4$ Y $a\#baa \in L_4$ Y $a\#ba$ ES PREFIJO DE $a\#baa$. ✓

NO CORRESPONDE LO TACHADO.

b) PARA ESTE CASO, EL AUTOMATA DADO EN a) CUMPLE CON SER APD, PUES CUMPLE QUE:

$\forall q \in Q, z \in \Gamma, a \in \Sigma$ VALE QUE:

$|\delta(q, a, z)| \leq 1$

$|\delta(q, \lambda, z)| \leq 1$. ✓

$|\delta(q, \lambda, z)| = 1 \Rightarrow |\delta(q, a, z)| = 0$.

OK, PERO PODRÍAS HABER AMPLIADO UN POCO MÁS LA EXPLICACIÓN. Y VER QUE LO CUMPLAN TUS TRANSICIONES.